Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики

Кафедра информатики и прикладной математики

Реферат

на тему

Числовые характеристики случайных величин

Исполнитель: студент группы P3218

Гхази Даниэль

Преподаватель:

Л.А. Муравьева-Витковская

2017 г.

Оглавление

Введение **1**

Числовые характеристики дискретных случайных величин**2**

Примеры решения задач с дискретными случайными величинами **6**

Числовые характеристики дискретных случайных величин **7**

Примеры решения задач с непрерывными случайными величинами **10**

Заключение **11**

Список литературы **12**

**Введение**

Числовые характеристики позволяют выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины, например:

* среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины;
* степень разбросанности этих значений относительно среднего;
* асимметрию (или «скошенность») плотности распределения;
* «крутость», то есть островершинность или плосковершинность плотности распределения и так далее.

В теории вероятностей используются различные числовые характеристики, имеющие разное назначение и разные области применения. Из них на практике наиболее часто применяются начальные и центральные моменты различных порядков, каждый из которых описывает то или иное свойство распределения. Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат, а центральные моменты – относительно среднего значения (математического ожидания), то есть центра распределения.

На практике обычно ограничиваются применением нескольких первых начальных или центральных моментов, что оказывается вполне достаточным для получения корректных конечных результатов.

В данной работе буду освещены указанные выше числовые характеристика, а также даны примеры задач для их вычисления.

**Числовые характеристика дискретных случайных величин**

Чаще всего на практике исследуют случайные величины двух видов: дискретные и непрерывные. Дадим определение дискретной случайной величине.

Дискретной называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа (т.е. между двумя соседними возможными значениями нет возможных значений), которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Другими словами, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным (в последнем случае множество всех возможных значений называют счетным).

Теперь же, перейдем непосредственно к описанию наиболее важных и используемых на практике числовых характеристик дискретных случайных величин.

**Математическое ожидание**

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание.

Математическое ожидание дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

Если дискретная случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание постоянной величины равной самой постоянной:

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

Математическое ожидание является начальным моментом 1-го порядка и обозначается как . Он характеризует положение случайной величины на числовой оси, то есть показывает некоторое среднее вероятностное значение, около которого группируются все возможные значения случайных величин.

**Рассеивание**

Второй начальный момент случайной величины X характеризует рассеивание, то есть разброс (удаленность) значений случайной величины относительно начала координат, и имеет размерность квадрата случайной величины.

**Центральные моменты**

Центральный момент s-го порядка случайной величины Х

определяется следующим образом (s = 1, 2, …):

Разность между значениями случайной величины и ее математическим ожиданием (X – М[X]) представляет собой отклонение случайной величины Х от ее математического ожидания и называется центрированной случайной величиной. Тогда центральный момент s-го порядка случайной величины Х можно определить как математическое ожидание s-ой степени соответствующей центрированной случайной величины:

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, так как математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

**Дисперсия**

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсия является центральным моментом второй степени.

Дисперсия случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

Дисперсию удобно вычислять по формуле

Дисперсия обладает следующими свойствами.

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий всех слагаемых:

Дисперсия случайной величины, как и второй начальный момент, характеризует разброс значений случайной величины, но, в отличие от второго начального момента, относительно математического ожидания, и имеет размерность квадрата случайной величины.

**Среднеквадратичное отклонение**

При решении различных задач удобно пользоваться характеристикой разброса, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Такой характеристикой является среднеквадратическое отклонение σ [X], которое определяется как корень квадратный из дисперсии:

.

**Коэффициент вариации**

В качестве безразмерной характеристики разброса случайных величин, определенных в области положительных значений, часто используют коэффициент вариации ν[X], который определяется как отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию:

При условии, что M[X] > 0.

**Примеры решения задач с дискретными случайными величинами**

**Задание**

Дискретная случайная величина Х принимает значения: 1; 2; 3 с вероятностями 0,2; 0,3; 0,5 соответственно.

1) Нарисовать график функции распределения дискретной случайной величины Х. 2) Вычислить математическое ожидание, дисперсию, второй начальный момент, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации случайной величины Х.

**Дано:**

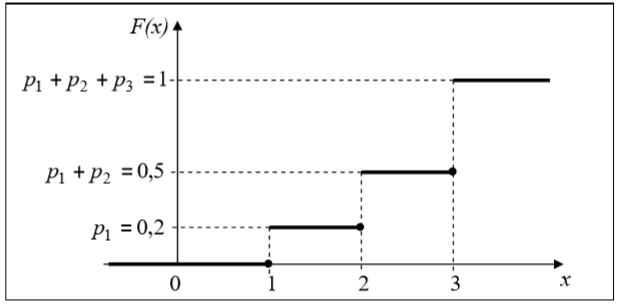
**Требуется:**

1) нарисовать F(x);

2) вычислить M[X], D[X], σ[X], ν[X].

**Решение:**

1) График функции распределения случайной величины X:

****

Следует отметить, что значения функции распределения F(x) для каждого значения случайной величины увеличиваются на величину, равную соответствующей вероятности появления этого значения, причем самое верхнее значение всегда равно 1.

Отметим также, что, как показано на графике (в виде черных кружочков), значения функции распределения в точках x = 1, x = 2 и x = 3 соответственно равны: F(1) = 0, F(2) = 0,2 и F(3) = 0,5, поскольку функция распределения F(x) определяется как вероятность появления случайной величины, значение которой строго меньше (а не меньше или равно) x: F(x) = P(X < x).

2) Математическое ожидание:

Второй начальный момент

Дисперсия:

Среднеквадратическое отклонение: ≈ 0,78.

Коэффициент вариации: ≈ 0,34.

**Числовые характеристика непрерывных случайных величин**

Непрерывной (аналоговой) случайной величиной называют такую величину, которая может принимать любое значение из некоторого промежутка. Например, интервалы времени между моментами поступления в вычислительную систему запросов на решение задач или между моментами формирования сообщений, передаваемых в телекоммуникационную сеть. Или время выполнения задач в вычислительной системе.

**Математическое ожидание**

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

где f(x) – плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если возможные значения принадлежат интервалу (a, b), то

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание постоянной величины равной самой постоянной:

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

Если – функция случайного аргумента X, возможные значения которого принадлежат всей оси Ox, то

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

Если математическое ожидание M(X) существует и кривая распределения симметрична относительно прямой x = C, то M(X) = C.

**Мода**

Модой непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. В частности, если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют бимодальным.

**Медиана**

Медианой непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината f(x) делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

**Дисперсия**

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

Или равносильным равенством

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

или

Дисперсия обладает следующими свойствами.

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий всех слагаемых:

**Среднее квадратическое отклонение**

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется следующим образом:

.

**Примеры решения задач с непрерывными случайными величинами**

**Задание**

Непрерывная случайная величина равномерно распределена в интервале (-30; +20). Нарисовать график плотности и функции распределения случайной величины.

Определить:

а) математическое ожидание случайной величины;

б) вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения.

**Дано:** равномерно распределённая случайная величина в интервале (-30; +20).

**Требуется:**

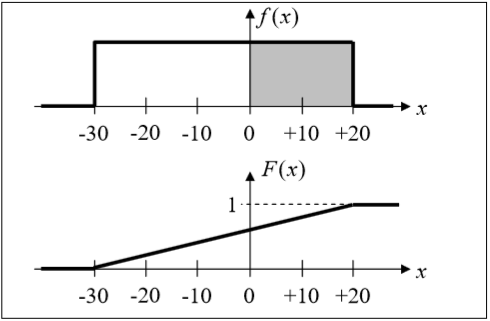
1) нарисовать f(x) и F(x);

2) вычислить M[X]; D[X], σ[X], ν[X].

3) определить

**Решение:**

1) Графики плотности и функции равномерно распределённой случайной величины:

****

2) Очевидно, что математическое ожидание равномерно распределённой случайной величины находится в середине заданного интервала (-30; +20) и равно: 5 M − = . Этот же результат может быть получен с использованием формулы для расчета математического ожидания равномерно распределённой случайной величины:

где a и b - соответственно левая и правая границы интервала.

3) Вероятность того, что случайная величина принимает положительные значения, также может быть определена несколькими способами. Во-первых, через значение функции распределения: Во-вторых, из графика плотности распределения как площадь под плотностью распределения, ограниченная слева значением x = 0 и справа значением x = +20 (на графике выделена серым цветом). Помня, что площадь под плотностью распределения на всём интервале значений случайной величины равна 1, можно сделать вывод, что площадь на интервале значений (0, +20) составляет 2/5, то есть равна 0,4.

**Заключение**

Подводя итоги, можно сказать, что применение числовых характеристик существенно облегчает решение многих вероятностных задач, в частности, при решении сложных задач, когда использование законов распределений приводит к громоздким выкладкам и не позволяет получить результаты в явном виде. Очень часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя одними числовыми характеристиками. Если в задаче фигурирует большое количество случайных величин, то для исчерпывающего суждения о результирующем законе распределения не требуется знать законы распределения отдельных случайных величин, фигурирующих в задаче, а достаточно знать лишь некоторые числовые характеристики этих величин.

**Список литературы**

1. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1979. – 400 с., ил.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: М., 1969 г., 576 стр. с илл.